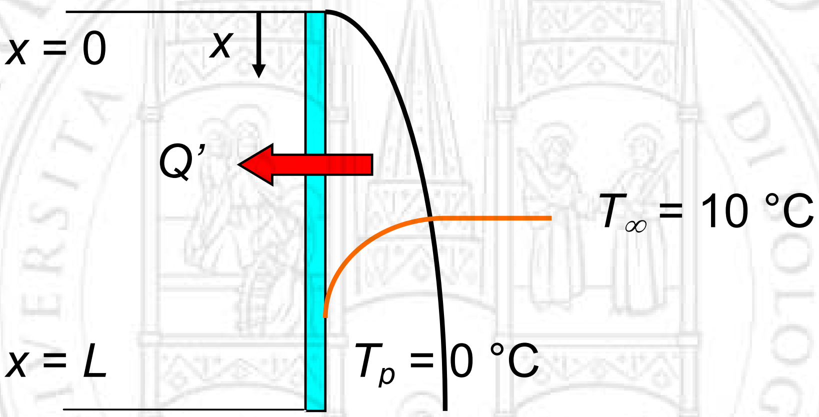
Esercizio (convezione)

La sala di uno chalet di montagna ha una porta esterna di vetro di dimensioni (larghezza W x altezza L) pari a 4,0x2,3 m.
Una mattina fredda, l'aria nella sala è alla temperatura T_∞ = 10 °C e la superficie interna della porta è parzialmente coperta di ghiaccio.

1. Stimare la potenza termica dispersa attraverso la porta.
2. Il ghiaccio comincia a formarsi dal basso o dall'alto ?

Assumere per l'aria il valore della viscosità cinematica $\nu = 14\cdot10^{-6}$ m^2/s.
Utilizzare la relazione per convezione naturale su lastre piane:

$$\begin{aligned} &\text{moto laminare}: h_x = 1{,}07\left(\left|T_p - T_\infty\right|/x\right)^{1/4} \qquad 10^4 < Gr_x < 10^9 \\ &\text{moto turbolento}: h_x = 1{,}30\left|T_p - T_\infty\right|^{1/3} \qquad 10^9 < Gr_x < 10^{12} \end{aligned} \tag{1}$$



Soluzione

Si assume che la faccia interna della porta sia a T_p = 0 °C poiché la superficie interna della porta è solo parzialmente coperta di ghiaccio.
L'aria della sala si raffredda a contatto con il vetro e fluisce verso il basso per convezione naturale.
Per $Gr_{cr} \approx 10^9$ si ha la transizione da moto laminare a moto turbolento:

$$10^9 \approx Gr_{cr} = \frac{g\beta\left|T_p - T_\infty\right|x^3}{\nu^2} \tag{2}$$

Da cui si può ricavare l'altezza alla quale avviene la transizione:

$$x_{cr} = \left(Gr_{cr}\frac{\nu^2}{g\beta\left|T_p - T_\infty\right|}\right)^{1/3} \tag{3}$$

Per β si assume il valore di gas perfetto alla temperatura di film:

$$\beta \approx \frac{1}{T_f} = \frac{2}{T_p + T_\infty} \approx \frac{2}{273+283} = \frac{1}{278} \approx 0{,}0036 \ \mathrm{K}^{-1} \tag{4}$$

Dunque:

$$x_{cr} \approx \left(10^9 \frac{\left(14\cdot 10^{-6}\right)^2}{9{,}81 \frac{1}{278}\left|273-283\right|} \right)^{1/3} \approx 0{,}82 \ \mathrm{m} \tag{5}$$

Noto x_{cr} si può integrare la relazione per h_x per trovarne il valor medio:

$$\bar{h} = \frac{1}{S}\int_S h_x dS = \frac{1}{L}\int_0^L h_x dx \tag{6}$$

Considerando un'altezza L = 2,3 m, una larghezza W = 4 m ed integrando nella direzione del moto:

$$S = L\cdot W \ , dS = W dx \tag{7}$$

Sostituendo la relazione per h_x:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{1}{L}\int_0^L h_x dx \approx \frac{1}{L}\left[\int_0^{x_{cr}} 1{,}07\left(\frac{\Delta T}{x}\right)^{1/4} dx + \int_{x_{cr}}^{L} 1{,}30(\Delta T)^{1/3} dx\right] = \\ &= \frac{1}{L}\left[1{,}07(\Delta T)^{1/4}\frac{x_{cr}^{3/4}}{3/4} + 1{,}30(\Delta T)^{1/3}\left(L - x_{cr}\right)\right] \approx \\ &\approx \frac{1}{2{,}3}\left[1{,}07\cdot 10^{1/4}\cdot\frac{4}{3}0{,}82^{3/4} + 1{,}30\cdot 10^{1/3}\cdot(2{,}3-0{,}82)\right] \approx \\ &\approx 2{,}75 \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}} \end{aligned} \tag{8}$$

Allora la potenza termica dispersa per convezione attraverso la porta è

$$\dot{Q} = \bar{h}\left|T_p - T_\infty\right| S \approx 2{,}75\cdot 10\cdot(2{,}3\cdot 4) \approx 253 \ \mathrm{W} \tag{9}$$

Il coefficiente di convezione locale è maggiore alla sommità della porta, dove la temperatura dell'aria ambiente tende a mantenere più caldo il vetro. Poi l'aria raffreddandosi scende lungo il vetro; ai piedi della porta è alla temperatura minima e qui il vapor d'acqua presente nell'aria condensa e poi congela a contatto con il vetro a 0 °C.
Dunque il ghiaccio comincia a formarsi dal basso.